In questa nota esporremo alcuni risultati di Gidas-Ni-Nirenberg ([3], [4]) di Benestycki-Lions-Peletier ([1]) e di Peletier-Serrin ([8]) sul problema:

(1) $\Delta u + f(u) = 0 \quad \text{in} \quad R^n$

(2) $u(x) > 0 \ \forall\, x \in R^n, \ u(x) \to 0 \ \text{per} \ |x| \to +\infty$

dove Δ è l'operatore di Laplace in R^n ed f è una funzione reale di variabile reale.

Nei lavori [3] e [4] Gidas-Ni-Nirenberg, utilizzando il principio di massimo di Hopf ed un metodo introdotto da Alexandnoff, dimostrano che le soluzioni (classiche) di certe equazioni di Poisson semilineari presentano notevoli proprietà di simmetria. Un esempio dei risultati ottenuti in [4], e che verrà riportato, insieme con altri risultati di simmetria, nel § 1 della presente nota, è il seguente:

sia $f \in C^{1+\varepsilon}([0, +\infty[)$ per un $\varepsilon > 0$ opportuno e sia $u \in C^{(2)}(R^n)$ una soluzione del problema (1) - (2).
Allora esistono $x_0 \in R^n$ e $v \in C^{(2)}([0, +\infty[)$ tali che

$$u(x) = v(|x - x_0|) \quad \forall\, x \in R^n$$

In luogo del problema (1) - (2) risulta pertanto naturale considerare il problema radiale

(3) $v'' + \frac{n-1}{r} v' + f(v) = 0, \ \text{in} \ ]0, +\infty[$,

(4) $v'(o) = 0, \ v(r) > 0 \quad r \geq 0, \ v(r) \to 0 \ \text{per} \ r \to +\infty.$

Nei lavori [1] e [8] si dimostrano, rispettivamente, teoremi di esistenza e di unicità per il problema (3) - (4); questi risultati verranno esposti nei paragrafi 3 e 4 della presente nota.

§ 1. PROPRIETA' DI SIMMETRIA PER LE SOLUZIONI POSITIVE DI $\Delta u + f(u) = 0$

Nella prima parte di questo paragrafo studieremo alcune proprietà di simmetria per le soluzioni positive dell'equazione

$$(1.1) \qquad \Delta u + f(u) = 0 \quad , \quad u \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$$

dove Ω è un aperto di R^n con frontiera di classe $C^{(2)}$, $\Omega \neq R^n$. Nella seconda parte tratteremo il caso in cui $\Omega = R^n$.

I teoremi che mostreremo nel seguito sono basati sul principio di massima forte di Hopf per gli operatori ellittici di ordine 2.

Teorema (M). Sia Ω un aperto connesso di R^n e sia $L = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial k_j} + \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$ un operatore a coefficienti limitati strettamente ellittico in Ω.

Allora, se $u \in C^{(2)}(\Omega)$ è tale che $Lu \geq 0$ ed $u \leq 0$ in Ω, risulta

$$u(x) < 0 \quad \forall x \in \Omega \qquad \text{oppure } u(x) = 0 \quad x \in \Omega.$$

Teorema (H). Sia L come nel precedente teorema e sia $x_0 \in \partial\Omega$ tale che $S(x_0 - \nu, |\nu|) \subseteq \Omega$ per un opportuno $\nu \in R^n \setminus \{o\}$.

Sia $u \in C^{(2)}(\Omega) \cap C(\Omega \cup \{x_0\})$ tale che $Lu \geq 0$ e $u \leq 0$ in Ω.

Allora, se $u \not\equiv 0$ e se $u(x_o) = 0$, risulta

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_o) \equiv \liminf_{t \to 0+} \frac{u(x_o) - u(x_o - t\nu)}{t} > 0$$

Una dimostrazione dei Teoremi (M) ed (H), nel caso di $c \leqq 0$, si può trovare in [10]. L'estensione al caso qui considerato si ottiene applicando i teoremi di [10] alla funzione $v(x) = e^{-\alpha x_1} u(x)$ con $\alpha_1 > 0$ convenientemente grande (in modo tale che risulti $L'v \geqq 0$ essendo L' un operatore lineare ellittico di ordine 2 a coefficienti limitati col termine di grado zero di segno negativo).

D'ora in poi supporremo $\partial\Omega$ *di classe* $C^{(2)}$ e Ω *limitato*.

Siano γ un vettore unitario di R^n, λ un numero reale e T^λ_γ l'iperpiano

$$\{x \in R^n / \; x \cdot \gamma = \lambda\};$$

per ogni $x \in R^n$ indichiamo con x^λ_γ (x^λ se non vi è rischio di ambiguità) il simmetrico di x rispetto a T^λ_γ:

$$x^\lambda_\gamma = X + 2(\lambda - x \cdot \gamma)\gamma$$

Poniamo poi

$$\Omega_\gamma(\lambda) = \{x \in \Omega / \; x \cdot \gamma > \lambda\},$$

e

$$\Omega'_\gamma(\lambda) = \{x \in R^n / x^\lambda_\gamma \in \Omega(\lambda)\}.$$

Siano infine

$$\lambda_{o,j} \equiv \lambda_o = \inf\{\lambda \in R/\Omega_\gamma(\mu) = \emptyset \ \forall \ \mu \geq \lambda\}$$

e

$$\lambda_{1,\gamma} \equiv \lambda_1 = \inf\{\lambda \in R/\lambda \leq \lambda_o, \ \Omega'_\gamma(u) \subseteq \Omega \ \forall \ \lambda \geq \mu\}$$

Teorema 1.1. Sia $u \in C^{(2)} \ (\bar{\Omega} \cap \{x \cdot \gamma > \lambda_1\}) \cap C^{(2)}(\Omega)$, $u > 0$ in Ω , $u = 0$ su $\partial\Omega \cap \{x \cdot \gamma > \lambda_1\}$. Supponiamo

(1.1) $\qquad \Delta u + f(u) = 0$

dove $f \in C^{(1)} \ (R, R)$. Allora

a) per ogni $\lambda \in \ ]\ \lambda_1, \lambda_o\ [$ risulta

(1.2) $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial \gamma}(x) < 0$, $u(x) < u(x^\lambda)$ $\qquad \forall\, x \in \Omega_\gamma(\lambda)$;

b) se esiste $x \in \Omega \cap T^\gamma_{\lambda_1}$ tale che $\dfrac{\partial u}{\partial \gamma}(x) = 0$ allora

$\Omega = \Omega_\gamma(\lambda_1) \cup \Omega'_\gamma \ (\lambda_1) \cup (T^\gamma_{\lambda_1} \cap \Omega)$ e u è simmetria rispetto a $T_{\lambda_1}^\gamma$

Alla dimostrazione del Teorema premettiamo alcuni lemmi.

Lemma 1.2. Sia $x_o \in \partial\Omega$ tale che $\gamma \cdot \nu(x_o) > 0$ (ν indica la normale esterna ad Ω). Supponiamo che per un opportuno $\varepsilon > 0$ risulti $u \in C^{(2)} \ (\overline{\Omega \cap S(x_o, \varepsilon)})$ e $u = 0$ su $\partial\Omega \cap \overline{S(x_o, \varepsilon)}$. Allora $\exists\ \delta > 0: \dfrac{\partial u}{\partial \gamma} < 0$ in $\Omega \cap S(x_o, \delta)$.

Dimostrazione. Poiché $u > 0$ in Ω e $u = 0$ in $\partial\Omega \cap \overline{S(x_0, \varepsilon)}$, risulta $\frac{\partial u}{\partial \gamma} \leq 0$ in $\partial\Omega \cap S(x_0, \varepsilon)$ (ritoccando eventualmente ε si può supporre $\gamma \cdot \nu(x) > 0 \ \forall x \in \partial\Omega \cap \overline{S(x_0, \varepsilon)}$). Ragionando per assurdo esiste una successione (x_p) in $\Omega \cap S(x_0, \varepsilon)$ tale che $x_p \to x_0$ e $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x_p) \geq 0$. Allora $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x_0) \geq 0$ e, quindi, $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x_0) = 0$.

D'altra parte, posto $\{x_p^*\} = (\partial\Omega) \cap \{x_p + t\gamma / t \geq 0\}$, si ha $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x_p^*) \leq 0$; per il teorema del valor medio esiste $y_p \in [x_p, x_p^*]$ tale che $\frac{\partial^2 u}{\partial \gamma}(y_p) \leq 0$; per $p \to +\infty$ si ottiene $\frac{\partial^2 u}{\partial \gamma}(x_0) \leq 0$ e, quindi, $\frac{\partial^2 u}{\partial \gamma}(x_0) = 0$ perché se fosse $\frac{\partial^2 u}{\partial \gamma}(x_0) < 0$ risulterebbe $u < 0$ in qualche punto di $\Omega \cap \{x_0 - t_\gamma / t > 0\}$.

Ora, se $f(o) \geq 0$, in $\Omega \cap S(x_0, \varepsilon)$ risulta

$$0 \geq \Delta u(x) + f(u(x) - f(u(x_0)) = \Delta u(x) + f'(\theta\, u(x))u(x) \ ;$$

per il Teorema (H) si ha allora $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x_0) = \gamma \cdot \nu(x_0) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$. Ciò contraddice il fatto che $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x_0) \geqq 0$.

D'altra parte, se $f(o) < 0$, poiché $u \equiv 0$ su $\partial\Omega \cap S(x_0, \varepsilon)$ e grad $u(x_0)$, riesce

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}(x_0) = \Delta u(x_0) = -f(u(x_0)) = f(o) > 0 \ ;$$

inoltre, poiché $u > 0$ in Ω, $\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_k \partial \nu}(x_0) = 0 \ \forall k = 1,2,-, \ n-1$

dove $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \nu\}$ è una base ortonormale di R^n. Ne viene allora

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2}(x_0) = \gamma \cdot \nu \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\partial u}{\partial \gamma}\right)(x_0) = (\gamma \cdot \nu)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}(x_0) > 0.$$

Ciò contraddice il fatto che $\frac{\partial^2 u}{\partial \gamma^2}(x_o) = 0$.

<u>Lemma 1.3.</u> Sia $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_o[$ tale che

$$u(x) \leqq u(x^\lambda) \ , \quad u(x) \not\equiv u(x^\lambda) \qquad x \in \Omega_\gamma(\lambda).$$

Allora $u(x) < u(x_\gamma^\lambda) \quad \forall x \in \Omega_\gamma(\lambda)$ e $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x) < 0 \ \forall x \in \Omega \cap T_\lambda^\gamma$.

<u>Dimostrazione</u>. Posto

$$v: \Omega'_\gamma(\lambda) \to R \ , \quad v(x) = u(x_\gamma^\lambda),$$

risulta

$$\Delta v + f(v) = 0 \qquad \text{in } \Omega'_\gamma(\lambda);$$

inoltre $\frac{\partial v}{\partial \gamma} \geqq 0$. Pertanto, se poniamo $w = v - u$, si ha

$$w \leqq 0 \quad , \quad \Delta w + f'(u + \theta(v-u))\, w \equiv \Delta w + cw = 0 \text{ in } \Omega'_\gamma(\lambda).$$

Poiché $w \not\equiv 0$ per il principio di massimo forte risulta $w < 0$ in $\Omega'_\gamma(\lambda)$ e $\frac{\partial w}{\partial \gamma} > 0$ su $\Omega \cap T_\lambda^\gamma$. Ma, su T_λ^γ,

$$\frac{\partial w}{\partial \gamma} = \frac{\partial v}{\partial \gamma} - \frac{\partial u}{\partial \gamma} = -2\frac{\partial u}{\partial \gamma} .$$

Ciò prova il lemma.

Dimostrazione del Teorema 1.1.. Poniamo

$$\Lambda = \{\lambda \in]\lambda_1, \lambda_0[\; / \; \frac{\partial u}{\partial \gamma}(x) < 0, \; u(x) < u(x^\lambda) \quad \forall x \in \Omega_\gamma(\lambda)\}$$

Dal lemma 1.2 segue subito che $\Lambda \neq \emptyset$. Posto $\mu = \inf \Lambda$ occorre provare che è $\mu = \lambda_1$ (si osservi che, se $\lambda \in \Lambda$ allora $\lambda' \in \Lambda \;\; \forall \lambda' \in]\lambda, \lambda_0[$). Per assurdo, supponiamo $\mu > \lambda_1$. Risulta $u(x) \equiv u(x^\mu)$ in $\Omega_\gamma(\mu)$ $(x_0 \in (\partial\Omega_\gamma(\mu)) \setminus T^\gamma_\mu \Rightarrow u(x_0) = 0 < u(x_0^\mu))$; inoltre, per ragioni di continuità $u(x) \leq u(x^\mu) \;\; \forall x \in \Omega_\gamma(\mu)$. Per il Lemma 1.3 riesce pertanto

$$u(x) < u(x^\mu) \quad \forall x \in \Omega_\gamma(\mu) \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial \gamma}(x) < 0 \;\; \forall x \in \Omega \cap T^\gamma_\mu .$$

Grazie ancora al Lemma 1.2, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x) < 0$ $\forall x \in \Omega(\mu - \varepsilon)$.

D'altra parte, per la definizione di μ, esistono una successione (λ_p) in $]\lambda_1, \mu[$ ed una successione (x_p) in Ω tali che:

$$\lambda_p \uparrow \mu, \quad x_p \in \Omega_\gamma(\lambda_p) \quad , \quad u(x_p) \geq u(x_p^{\lambda_p})$$

Ovviamente si può supporre $x_p \to \bar{x} \in \Omega_\gamma(u)$ e, quindi, $u(\bar{x}) \geq u(\bar{x}^\mu)$; di conseguenza, essendo $u(x) \leq u(x^\mu) \;\; \forall x \in \Omega_\gamma(\mu)$, riesce $u(\bar{x}) = u(\bar{x}^\mu)$. Deve essere allora $\bar{x} \in T_\mu$.

Esiste pertanto $p \in N$ tale che, il segmento$[x_p^{\lambda_p}, x_p] \subseteq \Omega_\gamma(\mu-\varepsilon)$ e ciò è assurdo perché $u(x_p^{\lambda_p}) \leq u(x_p)$ mentre $\frac{\partial u}{\partial \gamma} < 0$ in $\Omega_\gamma(\mu-\varepsilon)$.

Resta così provata la parte a) del Teorema.

Per completare la dimostrazione, supponiamo $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x) = 0$ in un punto $x \in \Omega \cap T^\gamma_{\lambda_1}$. Poiché, per ragioni di continuità, $u(x) \leq u(x^{\lambda_1}) \;\; \forall x \in \Omega_\gamma(\lambda_1)$, per il lemma 1.4 dovrà essere $u(x) =$ $= u(x_\gamma^{\lambda_1}) \;\; \forall x \in \Omega_\gamma(\lambda_1)$. In particolare, $\forall x \in (\partial\Omega_\gamma(\lambda_1)) \setminus T_{\lambda_1,\gamma}$, $u(x) = 0 =$

$= u(x^{\lambda_1})$ e, quindi, $x^{\lambda_1} \in (\partial\, \Omega'(\lambda_1)) \setminus T_{\lambda_1\gamma}$.

Ciò prova che Ω ed u sono simmetrici rispetto a $T_{\lambda_1\gamma}$.

Mostriano ora qualche esempio di applicazione del Teorema 1.1.

<u>Esempio 1.</u> Sia $\Omega = S(0, R)$ e sia $u \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$ una soluzione, positiva in Ω, del problema

$$(1.3) \qquad \begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 \\ u/\partial_\Omega = 0 \end{cases}$$

Allora, se f è di classe $C^{(1)}$, esiste $v \quad C^{(2)}([0,R], R)$ tale che

$$u(x) = v(|x|) \quad \forall x \in \Omega \quad ,$$

$$v'(r) < 0 \quad \forall r \in]0, R] \; , \quad v'(o) = 0$$

<u>Dimostrazione.</u> Per ogni $\gamma \in R^n$, $|\gamma| = 1$, risulta $\lambda_1^\gamma = 0$ e $\lambda_o^\gamma = R$. Per il Teorema 1.1. riesce

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x) < 0 \quad \forall x \in \Omega \quad , \quad x \cdot \gamma > 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial(-\gamma)}(x) < 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad x \cdot (-\gamma) < 0;$$

quindi $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x) = 0 \;\; \forall x \in \Omega:\; x \cdot \gamma = 0$. Ancora per il Teorema 1.1 u risulta allora simmetrica rispetto al piano $\{x \cdot \gamma = 0\}$. Data l'arbitrarietà di γ riesce quindi $u(x) = u(y) \;\; \forall x,y \in \Omega: |x| = |y|$.

Poniamo ora $v :]0, R] \to R$, $v(r) = u(r, o, -, o)$. Ovviamente $u(x) = v(|x|) \;\; \forall x \in \Omega \setminus \{0\}$ e $v \in C^{(2)}(]0, R])$. Essendo poi $\Delta u + f(u) = 0$,

risulta

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) + f(v(r)) = 0, \quad \forall\, r \in \,]0, R[$$

e quindi

$$v'(r) = \frac{v'(r_o)}{r^{n-1}} - \int_{r_o}^{r} f(v(s)(\frac{s}{r})^{n-1} ds, \quad \forall\, r, r_o \in \,]0, R[\;;$$

d'altra parte, poiché grad $u(o) = 0$,

$$\lim_{|x| \to o} v'(|x|) = \lim_{x \to o} |\mathrm{grad}\, u(x)| = 0.$$

Pertanto

$$v'(r) = - \int_{o}^{r} f(v(s)(\frac{s}{r})^{n-1} ds \qquad \forall\, r \in \,]0, R]$$

Di qui segue subito che v è prolungabile su $[0, R]$ in modo tale da risultare di classe $C^{(2)}$.

<u>Esempio 2.</u> Per ogni $p > 1$ il problema

$$(1.4) \qquad \begin{cases} \Delta u + u^P = 0 & \text{in } \Omega = S(0, R) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

ha al più una soluzione $u \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$.

Prima di provare questo risultato, richiamiamo il seguente

Lemma 1.4 ([8], Appendice) Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} v'' + \dfrac{n-1}{r} v' + f(u) = 0 \\ u(o) = u_o, \quad u(o) = u'_o \quad , \quad u_o > 0 \end{cases}$$

ha al più una soluzione di classe $C^{(2)}([0, \delta])$ se f è localmente lipschitziana in $]0, +\infty[$ ($\delta > 0$ opportuno).

Torniamo ora al problema (1.4). Per quanto provato nell'esempio 1 ogni soluzione di (1.4) è radialmente simmetrica. Siano $u_1(x) = v_1(|u|)$ e $u_2(x) = v_2(|x|)$ due soluzioni positive di (1.4), di classe $C^{(2)}$ su $\bar{\Omega}$.

Allora v_1, v_2 $C^{(2)}([0, R])$ e si ha

$$(1.5) \qquad \begin{cases} v_i'' + \dfrac{n-1}{r} v_i' + v_i^p = 0, \\ v_i(o) > 0, \quad v_i'(o) = 0 \end{cases} \qquad i = 1, 2$$

Posto $w(r) = \lambda^{2/p-1} v_2(\lambda r)$ con $\lambda = \left(\dfrac{v_1(o)}{v_2(o)}\right)^{\frac{p-1}{2}}$,

si riconosce subito che

$$w'' + \frac{n-1}{r} w' + w^p = 0$$

$$w(o) = v_1(o), \; w'(o) = 0$$

Allora, per il Lemma 1.5, $w = v_1$ e, quindi,

$$0 = v_1(R) = \lambda^{2/p-1} v_2(\lambda R)$$

ciò implica $\lambda \leqq 1$ ($v_2 > 0$ in Ω). Analogamente, scambiando v_1 con v_2, si ottiene $\lambda \geqq 1$. Dunque $\lambda = 1$ e $v_1(o) = v_2(o)$. Da (1.5) e dal Lemma (1.5) segue l'asserto.

Nota. Teoremi di unicità per problemi del tipo seguente

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 \\ u/_{\partial\Omega} = 0, \ u > 0 \text{ in } \Omega \end{cases}, \quad \Omega = S(0,R),$$

sono contenuti in un recente lavoro di Ni ([7]).

Esempio 3. Sia $\Omega = \{x \in R^n / R_0 < |x| < R\}$ e sia $u \in C^2(\Omega \cup \{|x| = R\})$ una soluzione di

$$\Delta u + f(u) = 0 \text{ in } \Omega \ , \quad u(x) = 0 \ \text{ se } |x| = R,$$

dove $f \in C^{(1)}(R,R)$.

Allora, per ogni $x \in R^n$ tale che $\frac{R_0+R}{2} \leqq |u| < R$ risulta

$\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x) < 0$ con $\gamma = \frac{x}{|x|}$

(in particolare u non ha punti critici nella corona $\frac{R_0+R}{2} \leqq |x| < R$)

Dimostrazione. Se γ è un vettore unitario di R^n allora $\lambda_0^{\gamma} = R$ e $\lambda_1^{\gamma} = \frac{R_0+R}{2}$. Per il Teorema 1.1 risulta $\frac{\partial u}{\partial \gamma} < 0$ in $\Omega_{\gamma}(\lambda^{\gamma})$ e, quindi, $\frac{\partial u}{\partial \gamma} \leqq 0$ in $\Omega \cap T^{\gamma}_{\lambda_1}$.

D'altra parte Ω non è simmetrico rispetto a $T^{\gamma}_{\lambda_1}$. Ancora dal Teorema 1.1 segue allora che $\frac{\partial u}{\partial \gamma} < 0$ anche su $\Omega \cap T^{\gamma}_{\lambda_1}$.

Osservazioni 1. I Lemmi 1.2 e 1.3, e quindi il Teorema 1 valgono anche nell'ipotesi di f Lipschitziana (Cfr. [3]). Allora i risultati provati in precedenza si applicano anche, ad esempio, all'equazione

$$\Delta u + \max\{o, u\} = 0$$

Osservazione 1.5. Il Teorema 1.1 non vale se l'ipotesi $u > 0$ viene sostituita dalla seguente:

$$u \geqq 0 \quad , \quad u \not\equiv 0 \quad \text{in } \Omega$$

Infatti, se Ω] - 2Π, 2Π[, la funzione $u(x) = 1-\cos x$ verifica l'equazione

$$u'' + (u-1) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

è di classe $C^{(2)}$ in $\bar{\Omega}$ non negativa e non $\equiv 0$. D'altra parte, se si prende $\gamma = 1$ risulta $\lambda_o \equiv \lambda_o^\gamma = 2\Pi$, $\lambda_1 \equiv \lambda_1^\gamma = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial \gamma} = u' > 0$ in qualche punto di $\Omega_\gamma(\lambda_1)$.

Osservazione 1.6. La tecnica degli "iperpiani mobili" era stata utilizzata da Serrin ([12]) per provare il seguente

Teorema (S). Sia Ω un aperto limitato e connesso di R^n con frontiera di classe $C^{(2)}$ e sia $u \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$ tale che

(1.6) $\quad \Delta u = -1 \quad \text{in } \Omega$

(1.6') $\quad u/\partial_\Omega = 0$

(1.6") $\quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \text{costante su } \partial\Omega$ (ν = normale esterna a Ω)

Allora Ω è una sfera e u è radialmente simmetrica. Più precisamente, se $\Omega = S(0, R)$, risulta

$$(1.7) \qquad u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{2n}$$

Dimostrazione. Se $\Omega = S(0,R)$ la funzione (1.7) è soluzione di (1.6), (1.6'), (1.6"); il principio di massimo assicura poi che non vi sono soluzioni diverse da questa. Quindi occorre provare soltanto che Ω è una sfera. Osserviamo anzitutto che se u verifica (1 6) e (1.6'), per il principio di massimo fonte, risulta $u > 0$ in Ω. Sia ora $\gamma \in R^n$, $|\gamma| = 1$, e sia $\lambda_1 = \lambda_1^\gamma$. Allora, posto $v: \Omega_\gamma(\lambda_1) \to R$, $v(x) = u(x_\gamma^\lambda)$ risulta

$$\Delta(v-u) = 0 \quad \text{in } \Omega'_\gamma(\lambda_1)$$

$$(v-u)/_{\partial\Omega'_\gamma(\lambda_1)} = 0$$

Allora $v \equiv u$ oppure $v < u$ in $\Omega'_\gamma(\lambda_1)$.

Proviamo che la seconda eventualità non può verificarsi distinguendo due casi.

i) $x_0 \in (\partial\Omega) \cap (\partial\, \Omega_\gamma(\lambda_1)$. Poiché $(v-u)(x_0) = 0$ per il Teorema (H) deve essere $\frac{\partial(v-u)}{\partial\nu}(x_0) < 0$, $\nu = \nu(x_0)$.

D'altra parte, per la (1.6"), $\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$

ii) $\exists\, x_0 \in \partial\Omega$ tale che $\nu(x_0) \perp \gamma$.

In questo caso un calcolo diretto permette di verificare che risulta $\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\partial v}{\partial x_i}(x_0)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$, $i,j = 1,-\dots,n$

Ciò porta immediatamente ad una contraddizione in forza del seguente Lemma di Serrin, che estende il Teorema (H) ad aperti privi della proprietà della sfera internamente tangente.

Lemma ([12], Lemma 1). Sia Ω un aperto con frontiera di classe $C^{(2)}$ e sia $T = \{x \cdot \gamma = \lambda\}$ un iperpiano di R^n tale che $\gamma = \nu(x_o)$, per un opportuno $x_o \in \partial\Omega$.

Sia $w \in C^{(2)}(\Omega \cap \{x \cdot \gamma \leq \lambda\})$ tale che $\Delta w \geq 0$, $w \leq 0$, $w(x_o) = 0$. Allora, per ogni vettore α penetrante in $\Omega \cap \{x \cdot \gamma < \lambda\}$, risulta

$$\frac{\partial w}{\partial \gamma}(x_o) < 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \gamma}(x_o) > 0$$

oppure $w \equiv 0$ in $\Omega \quad \{x \cdot \gamma < \lambda\}$.

Tornando alla dimostrazione del Teorema (S), possiamo quindi ritenere $v \equiv u$. Poiché $u = 0$ in $\partial\Omega$ e $u > 0$ in Ω, ne viene allora che Ω è simmetrico rispetto a $T^{\gamma}_{\lambda_1}$ e che Ω è semplicemente connesso. Il risultato segue ora dal fatto che gli unici aperti semplicemente connessi di R^n che sono simmetrici rispetto ad *un* iperpiano di ogni fascio di iperpiani, sono le sfere.

La tecnica degli iperpiani mobili è stata usata da Gidas-Ni-Nirenberg anche per provare risultati di simmetria per le soluzioni positive di equazioni semilineari di Poisson definite su tutto R^n.

Teorema 1.6 ([4], Teorema 2). Sia $f \in C^{1+\varepsilon}(R, R)$ con $\varepsilon > 0$ e $f(o) = 0$, $f'(o) < 0$. Sia $u \in C^{(2)}(R, R)$, $n \geq 2$, una soluzione positiva del problema

$$\Delta u + f(u) = 0 \ , \quad u(x) \to 0 \quad \text{per } x \to +\infty.$$

Allora esistono $x_o \in R^n$ e $v \in C^{(2)}(R, R)$ tali che

$$u(x) = v(|x-x_o|) \quad \forall x \in R^n$$

La dimostrazione di questo Teorema si fonda sul lemma seguente

Lemma 1.7. Siano $\gamma \in R^n$, $|\gamma| = 1$ e

$$\Lambda = \{\lambda \in R/u(x) > u(x_\gamma^\lambda) \ \forall x \in R^n: x \cdot \gamma < \lambda\}$$

Allora Λ è un aperto ed esiste $\lambda_o \in R : \Lambda \supseteq [\lambda_o, +\infty[$.

La dimostrazione di questo lemma è piuttosto lunga e complicata; riportiamo qui soltanto le sue linee generali.

Anzitutto si scrive f nella forma

$$f(u) = -mu + g(x)$$

dove $m > 0$ e $g = 0(x^\alpha)$ per un $\alpha > 0$ opportuno. Successivamente, supponendo $m = 1$ (cioè non è restrittivo) si prova che risulta

$$(1.8) \qquad u(x) = 0(|x|^{-\frac{n-1}{2}} e^{-|x|}) \quad \text{per } |x| \to +\infty.$$

Allora u si può rappresentare nella forma seguente

$$(1.9) \qquad u(x) = \int_{R^n} G(|x-y|)\, h(y)\, dy$$

dove $h(y) = 0(e^{-\alpha|y|})$ per $|y| \to +\infty$ e $G(|x-y|)$ è la funzione di Green di $(-\Delta + 1)$ in R^n:

$$G(r) = r^{-\frac{n-1}{2}} K_{\frac{n-2}{2}}(r)$$

(K_ν = funzione di Bessel modificata di ordine ν).

Il Lemma (1.7) si deduce direttamente da (1.9) (Proposizione (4.2) e Lemmi 6.1, 6.2 e 6.3 di [4]).

Dimostrazione del Teorema 1.6. Se $]\lambda_1 +\infty[$ è la componente connessa di Λ contenente $]\lambda_o, +\infty[$, allora $\lambda_1 \in R$. Infatti, se fosse $\lambda_1 = -\infty$, indicando con x_n il simmetrico di 0 rispetto al piano $\{x \cdot \gamma = -n\}$, si avrebbe $u(x_n) > u(o)$ $\forall n \in N$; ciò è assurdo perché $u(o) > 0$ e $u(x_n) \to 0$ per $n \to +\infty$, in quanto $|x_n| \to +\infty$ e $u(x) \to 0$ per $x \to +\infty$ (cfr. (1.8)). Allora, per il Lemma 1 8, che mostreremo fra poco, risulta $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x) < 0$ $\forall x \in R^n : \gamma \cdot x > \lambda_1$ ($\lambda \in \Lambda$ $\forall \lambda > \lambda_1$). D'altra parte, per ragioni di continuità, $u(x) \geq u(x_\gamma^{\lambda_1})$ $\forall x \in R^n$, $x \cdot \gamma \leq \lambda_1$. Ancora per il Lemma 1.8 riesce pertanto

$$u(x) = u(x_\gamma^\lambda) \quad \forall x \in R^n, \quad x \cdot \gamma \leq \lambda_1$$

oppure

$$u(x) > u(x_\gamma^\lambda) \quad \forall x \in R^n, \ x \cdot \gamma < \lambda_1 .$$

Ma questa ultima possibilità non può verificarsi in quanto $\lambda_1 \notin \Lambda$ ($]\lambda_1 +\infty[$ è una componente connessa di Λ).

Ciò prova che u è simmetrica rispetto al piano $\{x \cdot \gamma = \lambda_1\}$ e che $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x) \neq 0$ se $x \cdot \gamma \neq \lambda_1$.

Scegliamo ora $\gamma = e_j \equiv (0,\dots,1,\dots,0)$, $j = 1,2,-,n$. Per quanto provato esistono $\lambda_1^{(1)},-, \lambda_1^{(n)}$ tali che u è simmetrica rispetto a

ciascuno degli iperpiani $\{x_j = \lambda_1^{(j)}\}$, $j = 1,2,-,n$; inoltre, posto $x_0 =$ $= (\lambda_1^{(1)},\dots, \lambda_1^{(n)})$, grad $u(x) \neq 0 \;\; \forall \; x \neq x_0$.

Proviamo ora che u è simmetrica rispetto ad ogni iperpiano passante per x_0. Se γ è un vettore unitario di R^n, esiste un iperpiano T_λ^γ rispetto al quale u è simmetrica. Poiché la restrizione di u a T_λ^γ è dotata di massimo ($0 < u(x) \to 0$ per $|x| \to +\infty$) e poiché, in ogni punto di T_λ^γ, $\frac{\partial u}{\partial \gamma} = 0$ (per la simmetria di u) esiste un punto di $\bar{x} \in T_\lambda^\gamma$ tale che grad $u(\bar{x}) = 0$. Deve allora essere $\bar{x} = x_0$ e, quindi, T_λ^γ contiene x_0.

Resta così provato che u è radialmente simmetrica rispetto ad x_0. La dimostrazione del Teorema si completa ora come quella dell'Esempio 1.

<u>Lemma 1.8</u>. Sia u come nell'enunciato del Teorema 1.6. Supponiamo che per qualche $\lambda > 0$ risulti

$$u(x) \geqq u(x_\gamma^\lambda) \quad , \quad u(x) \not\equiv u(x_\gamma^\lambda) \qquad \forall x \in R^n : \gamma \cdot x < \lambda .$$

Allora $u(x) > u(x_\gamma^\lambda)$ se $\gamma \cdot x < \lambda$ e $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x) < 0$ se $x \in T_\lambda^\gamma$.

<u>Dimostrazione</u>. Nell'aperto $\Omega = \{x \cdot \gamma < \lambda\}$ consideriamo la funzione $z(x) = u(x_\gamma^\lambda) - u(x)$. Risulta $z \leqq 0$ e $z \not\equiv 0$; inoltre

$$\Delta z(x) + c(x)\, z(x) = 0 \quad , \quad \forall x \in \Omega$$

dove $c(x) = f(n(x) + t_x\,(u(x_\gamma^\lambda) - u(x)))$, $t_x \in \,]0, 1[$. Allora, per i teoremi (M) ed (H), $z < 0$ in Ω e $- 2 \frac{\partial u}{\partial \gamma}(x) = \frac{\partial z}{\partial \gamma}(x) > 0 \;\; \forall \; x \in T_\lambda^\gamma$.

Per ulteriori risultati di simmetria rinviamo direttamente a [3] e [4].

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

E. LANCONELLI

ESISTENZA, UNICITA' E SIMMETRIA DELLE SOLUZIONI POSITIVE DI EQUAZIONI DI POISSON SEMILINEARI

(II Parte)

BOLOGNA, 5 APRILE 1984

§ 2. ESISTENZA DI SOLUZIONI POSITIVE PER $u'' + \frac{n-1}{r} u' + f(u) = 0$

In questo paragrafo mostreremo un teorema di esistenza, dovuto a Berestycki-Lions-Peletier ([1]), per il problema

$$(2.1)\qquad \begin{cases} (a)\quad u'' + \dfrac{n-1}{r} u' + f(u) = 0 & \text{in }]\,0, +\infty[\\ (b)\quad u'(o) = 0,\ \ u(r) > 0 \quad r \geq 0\ , & u(r) \to 0 \text{ per } r \to +\infty. \end{cases}$$

Anzitutto proviamo la seguente

Proposizione 2.1. Se $f \in C(R, R)$ il problema di Cauchy

$$(2.2)\qquad \begin{cases} u'' + \dfrac{n-1}{r} u' + f(u) = 0 \\ u(o) = \alpha,\ \ u'(o) = 0 \end{cases} \quad , \ \alpha \in R\ ,$$

ha almeno una soluzione u di $C^{(2)}$ in un opportuno intorno di 0.

Dimostrazione. Supponiamo $n \neq 2$. Fissato $\rho > 0$ scegliamo $\delta > 0$ tale che

$$\frac{1}{n-2} \sup_{|u-\alpha| \leq \rho} |f(u)|\ \delta \leq \rho$$

Allora, posto

$$D = \{u \in C([-\delta, \delta], R) / |u(r) - \alpha| \leq \rho \quad r \in [-\rho, \rho]\}$$

e

$$T(u)(r) = \alpha + \frac{1}{n-2} \int_0^r f(u(s)) \, ((\frac{s}{r})^{n-1} r - s) \, ds,$$

risulta $T(D) \subseteq D$. Poiché

$$(T(u))'(r) = - \int_0^r f(u(s)) \, \frac{s}{r}^{n-1} \, ds$$

si riconosce subito che T è completamente continuo. Allora, per il Teorema di Schauder, esiste $u \in D$ tale che $T(u) = u$. Questa u è una funzione di classe $C^{(2)}$ su $[-\delta,\delta]$ che risolve (2.2). In modo analogo si prova l'affermazione nel caso di $n = 2$.

Sulla funzione f faremo le seguenti ipotesi:

(A) f è localmente lipschitziana in R e $f(o) = 0$

(B) $\alpha = \inf \{t > 0/f(t) \geqq 0\} > 0$

(C) Posto $F(u) = \int_0^u f(t)dt$, esiste $u_0 > 0 \ : \ F(u_0) > 0$.

(D) Posto $\beta = \inf \{t > 0/F(t) > 0\}$, risulta

$$f(t) > 0 \quad \forall \ t \in]\alpha, \beta[\qquad \text{(si noti che } \alpha < \beta).$$

(E) $\lim_{t \to \alpha+} f(t)/(t - \alpha) > 0$.

(F) Se $f(t) > 0 \quad \forall \ t > \beta$, allora

$$\lim_{t \to +\infty} f(t)/t^1 = 0$$

dove $l = (n+2)/(n-2)$ se $n \geq 3$, $l \in R$ (opportuno) se $n = 2$.

Teorema 2.2. Nelle ipotesi (A)-(F) il problema (2.1) ha almeno una soluzione $u \in C^{(2)}([0, +\infty[)$ tale che $u'(r) < 0 \ \forall r \in]0, +\infty[$

Alla dimostrazione del Teorema premettiamo alcune osservazioni.

Osservazione 2.3. La condizione $f(o) = 0$ è necessaria per la esistenza di una soluzione di (2.1) (poiché siamo interessati soltanto alle soluzioni positive non è restrittivo supporre, come faremo sempre nel seguito, $f(u) = 0$ per $u \leq 0$).

Infatti, se $f(o) \leq -2m < 0$ e se u è soluzione di (2.1)-(a), allora $u''(r) + \frac{n-1}{r} u'(r) \geq m \ \forall \ r \geq \bar{R}$ e quindi $(r^{n-1}u'(r))' \geq$ $\geq mr^{n-1} \ \forall \ r \geq \bar{R}$; pertanto

$$u(r) \geq u(R) + \int_R^r \left(\left(\frac{R}{t}\right)^{n-1} u'(R) + \frac{m}{m} t\left(1 - \left(\frac{R}{t}\right)^n\right) \right) dt \to +\infty$$

per $r \to +\infty$

Analogamente, se $f(o) > 0$, si prova che $u(r) \to -\infty$ per $r \to +\infty$.

Osservazione 2.4. La condizione (C) è necessaria per l'esistenza di una soluzione di (2.1).

Se $u \in C^{(2)}([0, +\infty[)$ è una soluzione di (2.1)-(a), allora moltiplicando l'equazione per u' ed integrando, si ottiene

$$\text{(2.3)} \qquad \frac{1}{2}(u'(r))^2 - \frac{1}{2}(u'(r_0))^2 + (n-1)\int_{r_0}^{r_1} (u'(r))^2 \frac{dr}{r} + \int_{u(r_0)}^{u(r_1)} f(t)dt = 0$$

per ogni $r_0, r_1 > 0$.

Fissato $r_1 > 0$, il primo membro di (2.3) ha limite per $r_0 \to 0$ e si ha

$$(2.4) \qquad \frac{1}{2}(u'(r_1))^2 + (n-1)\int_0^{r_1} \left(\frac{u'(r)}{r}\right)^2 dr + \int_{u(o)}^{u(r_1)} f(t)dt = 0;$$

d'altra parte, se $u(r_1) \to 0$ per $r_1 \to +\infty$, esistono i limiti

$$\lim_{r_1 \to +\infty} \int_{u(o)}^{u(r_1)} f(t)dt = \int_{u(o)}^{o} f(t)dt \in R, \qquad \lim_{r_1 \to +\infty} \int_0^{r_1} (u'(r))^2 \frac{dr}{r} \in [0,+\infty[$$

Allora, per (2.4), esiste $\lim\limits_{r_1 \to \infty} (u'(r_1))^2 \in [0, +\infty[$; di conseguenza

$$\int_0^{+\infty} \frac{(u'(r))^2}{r} dr \in [0, +\infty[$$

ed allora $\lim\limits_{r_1 \to +\infty} (u'(r))^2 = 0$. In definitiva

$$(n-1)\int_0^{+\infty} \frac{(u'(r)))^2}{r} dr = \int_0^{u(o)} f(t)\, dt$$

Allora, se u è soluzione di (2.1) e se $n > 1$, $\int_0^{u(o)} f(t)\, dt > 0$.

Se $n = 1$ l'affermazione segue subito da (2.4).

La formula (2.3) permette di provare la seguente

Proposizione 2.5. Sia $u \in C^{(2)}([0, +\infty[)$ soluzione di (2.1). Allora $u'(r) < 0 \ \forall\, r > 0$.

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che se $u'(\xi) = 0$ per un

opportuno $\xi > 0$, allora $u''(\xi) \neq 0$. Infatti, se fosse anche $u''(\xi) = 0$ sarebbe $f(u(\xi)) = 0$ ed allora si avrebbe $u(r) = u(\xi)$ $\forall r > 0$ (per l'unicità delle soluzioni del problema di Cauchy relativo a (2.1)-(a) con le condizioni iniziali $u|_{\xi} = u(\xi)$, $u'|_{\xi} = 0$). Ciò è assurdo perché $0 < u(r) \to 0$ per $r \to +\infty$.

Proviamo che u non può avere punti di massimo in $]0, +\infty[$. Ne verrà che u non può avere neppure punti di minimo in $]0, +\infty[$; allora $u'(r) \neq 0$ $\forall r > 0$ e, quindi $u'(r) < 0$ $\forall r > 0$ in quanto $0 < u(r) \to 0$ per $r \to +\infty$.

Ragioniamo per assurdo e supponiamo che sia $\bar{\xi} \in]0, +\infty[$ un punto di minimo per u. Allora, in un intorno sinistro di $\bar{\xi}$, $u' > 0$. Poiché $u'(o) = 0$ esiste $r_0 \in]0, \bar{\xi}[$: $u'(r_0) = 0$ e $u'(r) > 0$ $\forall r$ $]r_0, \bar{\xi}[$. Chiaramente $u(r_0) < u(\bar{\xi})$. Poiché $u(r) \to 0$ per $r \to +\infty$, esiste $r_1 > \bar{\xi}$ tale che $u(r_1) = u(r_0)$.

Dalla (2.3) si trae allora

$$\frac{1}{2}(u'(r_1))^2 + (n-1)\int_{r_0}^{r_1} \frac{(u'(r))^2}{r}\, dr = 0;$$

se $n \neq 1$ ciò è assurdo perché $u' \neq 0$ su $[r_0, r_1]$. Se $n = 1$ si arriva ancora ad un assurdo se si prende $r_1 = \sup \{r > \bar{\xi} | u(r) = u(r_0)\}$

<u>Osservazione 2.6</u>. In 2 è provata l'esistenza di soluzioni radiali del problema (2.1) sostanzialmente sotto le ipotesi (A), (C) (F) e

(B') $$\lim_{t \to o} \frac{f(t)}{t} = - m < 0.$$

Le ipotesi (D) ed (E) appaiono pertanto di tipo tecnico. L'ipotesi (B'), più forte, ovviamente, della (B) consente di provare che ogni soluzione

di (2.1) è esponenzialmente decrescente all'infinito.

Proposizione 2.7. Sia $f \in C(\,]0, +\infty[\,)$ verificante l'ipotesi (B') e sia u una soluzione di (2.1). Allora, per ogni $\delta \in \,]\sqrt{0}, m[$, risulta

$$\limsup_{r \to +\infty} u(r)\, e^{\delta r} < +\infty .$$

Dimostrazione ([8], Lemma 5). Poiché $u''(r) = -\frac{n-1}{r} u'(r) - f(u) > 0$ per $r \geq \bar{R}$, allora esiste $\lim_{r \to +\infty} u'(r)$. Poiché $u(r) \to 0$ per $r \to +\infty$ dovrà essere $\lim_{r \to +\infty} u'(r) = 0$.

Posto $z = -\frac{u'}{u}$ risulta $z > 0$ (Prop. 2.5) e

$$z' = -\frac{u''}{u} + \frac{u'^2}{u} = z^2 - \frac{n-1}{r} z + \frac{f(u)}{u}$$

Scegliamo ora $\bar{R} > 0$ tale che $f(u(r))/u(r) \geq -(m-1)$ e $\frac{n-1}{r} \leq m + \frac{1}{2}$ $\forall\, r \geq \bar{r}$. Allora $z(r) \leq 2\sqrt{m+1}$ $\forall\, r \geq \bar{R}$.

Infatti, se fosse $z(r_1) > 2\sqrt{m+1}$ per un $r_1 > \bar{R}$, in un intorno di r_1 (e quindi, a posteriori, per ogni $r \geq r_1$) si avrebbe

$$z' = \frac{1}{2} z^2 + \left(\frac{1}{2} z^2 - \frac{n-1}{r} z + \frac{f(u)}{u}\right) \geq \frac{1}{2} z^2$$

e, quindi $\lim_{r \to r^*} z(r) = +\infty$ per un opportuno $r^* < +\infty$.

Pertanto $\limsup_{r \to +\infty} \frac{u'(r)}{u(r)} \leq 2\sqrt{m+1}$. Poiché $u(r), u'r) \to 0$ per $r \to +\infty$, per la regola di de l'Hopital si ha

$$\lim_{r \to +\infty} \left(\frac{u'}{u}\right)^2 = \lim_{r \to +\infty} \frac{u''(r)}{u(r)} = \lim_{r \to +\infty} \left((n-1)\frac{\bar{z}}{r} - \frac{f(u)}{u}\right) = m$$

Allora, per ogni $\delta \in \left]0, \sqrt{m}\right[$, esiste $\bar{\bar{R}}$ tale che

$$-\frac{u'(r)}{u(r)} \geq \delta \quad \forall r \geq \bar{\bar{R}};$$

di qui, integrando, si trae

$$\log \frac{1}{u(r)} > C + \delta r \quad , \forall r \geq \bar{\bar{R}}$$

e, quindi, l'asserto.

Mostriamo ora che l'ipotesi (D) garantisce l'esistenza di soluzioni dell'equazione (2.1)-(a) definite su $[0, +\infty[$.

Posto $\gamma = +\infty$ se $f(t) > 0 \ \forall t > \beta$ e $\gamma = \inf\{t > \beta / f(t) = 0\}$ se $f(t) = 0$ per qualche $t > \beta$, si ha infatti:

Proposizione 2.8. Sia $f \in C([0, +\infty[)$ verificante l'ipotesi (D) e tale che $f(u) = 0$ per $u \leq 0$. Allora ogni soluzione non prolungabile del problema di Cauchy

$$(2.5) \qquad \begin{cases} u'' + \dfrac{n-1}{r} r' + f(u) = 0 \\ u(o) = \xi \quad , \quad u'(o) = 0 \end{cases} \quad , \quad \xi \in \left]\alpha, \gamma\right[$$

è definita almeno su $[0, +\infty[$.

Dimostrazione. Sia u una soluzione non prolungabile di (2.5).

Posto $T_0 = \{r \geqq 0 / u(t) \leqq \xi \ \forall t \in [0, r[\}$ proviamo che $r_0 = \sup T_0$ è $+\infty$. Supponiamo, per assurdo, che sia $r_0 < +\infty$. Per continuità risulta $u(r_0) = \xi$ ed allora, per un opportuno $\delta > 0$, $u(r) \in]\alpha, \gamma[\ \forall r \in] r_0 - \delta, r_0 + \delta [$. D'altra parte, per la (2.3)

$$\frac{1}{2} (u'(r))^2 + (n-1) \int_0^r (u'(r))^2 \frac{dr}{r} + F(u(r)) = F(\xi)$$

e quindi $F(u(r)) \leqq F(\xi)$. Poiché $u(r) \in]\alpha, \gamma[\ \forall r \in] r_0 - \delta, r_0 + \delta [$ e poiché, per l'ipotesi (D), F è strettamente crescente su $]\alpha, \beta[$, di qui si trae $u(r) \leqq \xi \ \forall r \in] r_0 - \delta, r_0 + \delta [$. Ciò contraddice la definizione di r_0.

Poniamo ora $T^* = \{r \geqq 0 / u(t) \geqq 0 \ \forall t \in [0, r] \}$. Se $\sup T^* = +\infty$ la Proposizione è provata.

Supponiamo ora $r^* = \sup T^* < \infty$. Per ragioni di continuità risulta $u(r^*) = 0$ e, per definizione di r^*, $u'(r^*) \leqq 0$. Ma, se fosse $u'(r^*) = 0$ allora $u \equiv 0$ e la Proposizione sarebbe provata. Supponiamo dunque $u'(r^*) < 0$. Allora $u < 0$ in un intorno destro di r^* e ivi verifica l'equazione $u'' + \frac{n-1}{r} u' = 0$. Allora

$$u(r) = u'(r^*)(r^*)^{n-1} \int_{r^*}^r t^{-n+1} \, dt \quad , \forall r \geqq r^*.$$

Questo completa la dimostrazione.

Supponiamo ora f localmente lipschitziana su R . Per ogni $\xi \in]\alpha, \gamma[$ indichiamo con $u(\xi, \cdot)$ la soluzione del problema di Cauchy (2.5). Supponiamo che dominio $(u(\xi, \cdot)) \supseteq [0, +\infty[\quad \forall \xi \in]\alpha, \gamma[$.

Poniamo $I =]\alpha, \gamma[$,

$$I^+ = \{\xi \in]\alpha, \gamma[\ / \ \exists r_0 > 0 : u'(\xi, r_0) = 0, \ u(\xi, r) > 0, \ \forall r \in [0, r_0] \},$$

e

$$I^- = \{\xi \in]\alpha, \gamma[\ / \exists r_0 > 0 : u(\xi, r_0) = 0, u'(\xi, r_0) < 0$$
$$\forall r \in]0, r_0]\}$$

Se $\xi \in I \setminus (I^+ \cup I^-)$ e se f verifica l'ipotesi (E) allora $u(\xi, \cdot)$ è soluzione del problema (2.1).

Infatti, posto $T = \{r > 0 / u(\xi, t) > 0,\ u'(\xi, t) < 0\ \forall t \in]0, r]\}$, se fosse $\sup T = r_0 < +\infty$ si avrebbe

$$u(\xi, r_0) = 0 \quad e \quad u'(\xi, t) < 0 \quad \forall t \in]0, r_0]$$

e quindi $\xi \in I_-$ oppure

$$u(\xi, r) > 0\ \forall\ r \in]0, r_0] \quad e \quad u'(\xi, r_0) = 0$$

e quindi $\xi \in I_+$

Allora $u(\xi, \cdot) > 0$ e $u'(\xi, \cdot) < 0$ sul $]0, +\infty[$ per ogni $\xi \in I \setminus (I^+ \cup I^-)$; per tali valori di ξ $u(\xi, \cdot)$ risulta soluzione del problema (2.1) in forza del seguente

Lemma 2.7. Supponiamo che f verifichi le ipotesi (A), (D) ed (E). Sia $\xi \in]\alpha, \gamma[$ tale che

$$u(\xi, r) > 0\ ,\ u'(\xi, r) < 0\ \forall r > 0.$$

Allora $\lim_{r \to +\infty} u(\xi, r) = 0$

Dimostrazione. Sia $l = \lim_{r \to +\infty} u(\xi, r)$. Risulta $0 \leq l < \xi$. Poiché $\lim_{r \to +\infty} u'(\xi, r) = 0$ (cfr. Oss. 2.4) e poiché u verifica l'equazione (2.1)-(a), si ha

$$\lim_{r \to +\infty} u''(\xi, r) = -f(l)$$

e, quindi, $f(l) = 0$. Allora $l = \alpha$ oppure $l = 0$.

Supponiamo, per assurdo, $l = \alpha$. Posto $v(r) = r^{\frac{n-1}{2}} (v(r) - \alpha)$ risulta $v(r) > 0 \ \forall r > 0$ e

$$v''(r) = \frac{(n-1)(n-3)}{r^2} - \frac{f(u)}{u-\alpha} v(r)$$

Esistono pertanto $m > 0$ ed $\bar{R} > 0$ tali che

$$v''(r) \leq m\, v(r) \quad \forall r \geq \bar{R}.$$

Ma, come si riconosce facilmente, non esiste nessuna funzione $v > 0$ verificante quest'ultima disequazione differenziale.

Dimostrazione del Teorema 2.2. Basterà provare che I^+ ed I^- sono aperti non vuoti (è ovvio che $I^+ \cap I^- = \emptyset$).

a) $I^+ = \emptyset$ Sia $\xi \in]\alpha, \beta[$. Dalla (2.4), se $u(r_1) = 0$, si ricava

$$\frac{1}{2}(u'(r_1))^2 + (n-1) \int_0^{r_1} \frac{u'(r))^2}{r} dr + \int_\xi^0 f(t)dt = 0$$

e ciò è assurdo perché $\int_\xi^0 f(t)dt = -F(\xi) > 0$. Allora $\xi \notin I^-$. Supponia

mo per assurdo, che sia anche $\xi \notin I^+$. Per il Lemma 2.7 risulta allora $\lim_{r \to +\infty} u(\xi, r) = 0$; pertanto (Cfr. Osservazione 2.4)

$$(n-1)\int_0^{+\infty} (n'(r))^2 \frac{d_r}{r} = \int_0^{\xi} f(t)\, dt < 0$$

Questa contraddizione prova che $]\alpha, \beta[\in I_+$.

b) $I^- \neq \emptyset$. Poniamo $g(t) = f(\min\{t, \gamma\})$ e $G(t) = \int_0^t g(s)\, ds$.

Le ipotesi fatte su f assicurano (cfr. [5] e [1] pag. 147) che per R abbastanza grande il problema

$$\begin{cases} \Delta u + g(u) = 0 \quad \text{in } S(0, R) = \Omega \\ u/_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

ha almeno una soluzione positiva $u \in C^{(2)}(\bar{\Omega})$. Risulta (cfr. § 2) $u(x) = v(|x|)$ con $v \in C^2(]0, R[)$ e $v'(r) < 0 \ \forall r > 0$. Allora $u(o) = \max_{\bar{\Omega}} u$ e, quindi, $\Delta u(o) \leq 0$.

Se $\Delta u(o) = 0$ risulta $g(u(o)) = 0$, $u(o) = \alpha$ ($u(o)$ è > 0); la funzione v, in quanto soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} v'' + \frac{n-1}{r} v' + g(v) = 0 \\ v'(o) = 0, \ v(o) = \alpha \end{cases}$$

è costante su $[0, R]$ grazie al Lemma di unicità 1.4.

Ciò è assurdo in quanto $v(R) = u/_{\partial\Omega} = 0$.

Deve essere pertanto $\Delta u(o) < 0$ e $g(u'(o)) > 0$.

Allora $\xi = u(o) = v(o) \in I$ e quindi, poiché $v(R) = 0$ e

$v'(r) < 0 \ \forall \ r \in]\ 0, R[\ , \ \xi \in I^-$.

La dimostrazione del Teorema 2.2 si completa provando che I^+ ed I^- sono aperti; per questo rinviamo direttamente a [1] , pag. 147.

§ 3. UNICITA'

In questo numero ci proponiamo di illustrare il metodo di Peletier e Serrin, utilizzato in [8]e [9], per provare l'unicità della soluzione del problema

$$(3.1) \quad \begin{cases} u'' + \dfrac{n-1}{r} u' + f(u) = 0 \quad \text{in } \ 0, +\infty \\ u(r) > 0 \ \forall \ r \geqq 0, \ u'(o) = 0, u(r) \to 0 \quad \text{per } r \to +\infty \end{cases}$$

La funzione f verifica le ipotesi (A), (B) e (C) del § 2 oltre alla seguente

(S) la funzione $u \to \dfrac{f(u)}{u-\beta}$ è decrescente (debolmente) nell'insieme $\{u > \beta \ / \ f(u) > 0\}$.

Geometricamente l'ipotesi (5) significa che l'insieme D = $= \{(u , v) \in R^2 \ /u > \beta , \ 0 < v < f(u)\}$ è stellato rispetto al punto (β, o).

Utilizzando le proprietà generali delle soluzioni di (3.1) già mostrate nel § 2, si possono provare le seguenti affermazioni (per queste è sufficiente che f verifichi (A), (B) e (C)).

(I) Due diverse soluzioni di (3.1) coincidono, al più, in un numero finito di punti ([8], Lemma 6)

(II) Siano u_1 ed u_2 due soluzioni di (3.1) e siano $v_1 = u_2^{-1}$ e $v_2 = u_2^{-1}$ (u_1 e u_2 sono strettamente decrescenti: Cfr. Prop. 2.5).

Supponiamo $u_1 > u_2$ sull'intervallo $]R, +\infty[$. Allora $v_1 - v_2$ è positiva e strettamente decrescente su $]0, u_2(R)[$ ([8], Lemma 9).

Si ha allora

Proposizione 3.1. Supponiamo che f verifichi (A), (B) e (C). Siano u_1 e u_2 due soluzioni di (3.1) diverse fra loro tali che $u_1(R) = u_2(R) \equiv U$ per un $R \geq 0$. Allora $U > \beta$.

Dimostrazione. Sia (R, U) l'ultimo punto di intersezione dei grafici di u_2 e u_2. Moltiplicando l'equazione in (3.1) per $r^{2(n-1)}u_i'$ ed integrando, si ottiene

$$\frac{1}{2} r^{2(n-1)}(u_i'(r))^2 - \frac{1}{2} R^{2(n-1)}(u_i'(R))^2 =$$

$$= \int_{u(r)}^{U} (v_i(t))^{2(n-1)} f(t)dt \quad , \quad i = 1,2.$$

Risulta $r^{n-1}u_i'(r) \to 0$ per $r \to +\infty$ (Cfr. [9] ; cfr. anche la Prop. 2.7). Allora

$$\frac{1}{2} R^{2n-2}((u_2'(R))^2 - (u_1'(R))^2) = \int_0^u \psi(t)f(t)\, dt$$

dove $\psi(t) = (v_1(t))^{2n-2} - (v_2(t))^{2n-2}$.

Possiamo supporre $u_1 > u_2$ su $]R, +\infty[$ e, quindi, $u_2'(R) < u_1'(R) < 0$;

allora

$$\int_0^U \psi(t)f(t)dt > 0$$

Ora, per la (II), $v_1 - v_2 > 0$ su $]0, U[$ e, quindi, lo stesso vale per ψ. Inoltre $(v_1 - v_2)' < 0$ e, quindi,

$$\psi' = 2(n-2)\{v_1^{2n-3}(v_1-v_2)' + (v_1^{2n-3} - v_2^{2n-3})\, v_2'\} < 0$$

(qui supponiamo $n > 1$ e, quindi, essendo n intero, $2n - 3 > 0$; nel caso $n = 1$ l'unicità è banale: [8] pag. 187).

Allora, se fosse $U \leq \beta$, si avrebbe

$$0 < \int_0^U \Psi(t)f(t)dt = \Psi(U)f(U) - \int_0^U \Psi'(t)F(t)dt \leq 0.$$

Deve quindi essere $U > \beta$.

<u>Proposizione 3.2</u>. Se f verifica (A), (B), (C) ed (S), due diverse soluzioni u_1 ed u_2 di (2.1) non possono intersecarsi

<u>Dimostrazione</u>. Ragioniamo per assurdo e supponiamo $u_1(R) = u_2(R) = U$ per un $R > 0$ (se fosse $u_1(o) = u_2(o)$ sarebbe $u_1 \equiv u_2$.

Possiamo supporre $u_1 < u_2$ su $]R, +\infty[$. Per la proposizione precedente risulta $\beta < U$; esiste allora $\varepsilon > 0$ tale che $\beta + \varepsilon < U$. Sia $\rho > R$ tale che $u_1(\rho) = \beta + \varepsilon$. Poniamo

$$\bar{u}_1 = u_1 - (\beta + \varepsilon) \ , \quad \bar{u}_2 = u_2 - (\beta + \varepsilon) \text{ e}$$

$$\lambda = \sup\{\frac{\bar{u}_1(r)}{\bar{u}_2(r)} \ / \ r \in [0, \rho]\}$$

Poiché $u_1 > u_2$ in un intorno destro di R, risulta $\lambda > 1$. Poniamo infine $z = \lambda\bar{u}_2 - \bar{u}_1$.

Per definizione di λ è $z \geqq 0$ in $[0, \rho]$ e, poiché $\lambda > 1$ e $u_2(\rho) > u_1(\rho)$, esiste $\eta \in [0, \rho[$ tale che $z(\eta) = 0$. Risulta $z'(\eta) = 0$ e $z''(\eta) \geqq 0$. Di conseguenza

$$f(u_1(\eta)) - \lambda f(u_2(\eta)) \geqq 0$$

od anche, poiché $\bar{u}_1(\eta) = \lambda\bar{u}_2(\eta) > 0$,

$$\frac{f(\bar{u}_2(\eta) + \beta + \varepsilon)}{\bar{u}_2(\eta)} \leqq \frac{f(\bar{u}_1(\eta) + \beta + \varepsilon)}{\bar{u}_1(\eta)}$$

Ora, per la condizione (S), $f(u)/(u - \beta)$ è decrescente su $]\beta, u(o)[$; ne viene che $f(u)/(u - \beta - \varepsilon)$ è strettamente decrescente su $]\beta + \varepsilon, u(o)[$; quindi, poiché $\bar{u}_1(\eta) > \bar{u}_2(\eta)$,

$$\frac{f(\bar{u}_2(\eta) + \beta + \varepsilon)}{\bar{u}_2(\eta)} \leqq \frac{f(\bar{u}_1(\eta) + \beta + \varepsilon)}{\bar{u}_1(\eta)} \equiv \frac{f(t)}{t - \beta - \varepsilon} < \frac{f(s)}{s - \beta - \varepsilon} \equiv \frac{f(\bar{u}_2(\eta) + \beta + \varepsilon)}{\bar{u}_1(\eta)} .$$

Questa contraddizione prova l'asserto.

Teorema 3.3. Se f verifica (A), (B), (C) ed (S) allora il problema (3.1) ha al più una soluzione.

Dimostrazione. Se u_1 e u_2 sono due diverse soluzioni di (3.1), per la Proposizione precedente $u_1(r) \neq u_2(r)$ $\forall\, r \geqq 0$.

Supponiamo $u_1 > u_2$ e consideriamo la funzione $w = v_1 - v_2$, dove $v_i = u_i^{-1}$, $i = 1,2$. Allora $w > 0$ e $w' > 0$ su $]0, u_2(o)[$ (per la II).

D'altra parte per $t = u_2(o)$ risulta $w'(t) = +\infty$. Questa contraddizione prova l'asserto.

Osservazione 3.4. Consideriamo il problema

$$(3.2) \quad \begin{cases} \Delta u - u + u^p = 0 \\ u > 0 \text{ in } R^n,\ u(x) \to 0 \text{ per } |x| \to +\infty \end{cases}$$

Per ogni $p > 1$ le (eventuali) soluzioni di questo problema sono radialmente simmetriche rispetto ad un punto $x_o \in R^n$.

D'altra parte, se u è soluzione di (3.2) anche $x \to u(x - x_o)$ lo è. Allora (3.2) è equivalente al problema radiale

$$(3.3) \quad \begin{cases} v'' + \frac{n-1}{r} v' + v^p - v = 0 \\ v'(o) = 0,\ v(r) > 0 \quad r \geq 0 \\ v(x) \to 0 \text{ per } |x| \to +\beta \end{cases}$$

La funzione $f(u) = -u + u^p$, $p > 1$, verifica le ipotesi (A), (B), (C), (D) ed (E) del § 2. Allora, per il Teorema 2.2 il problema (3.3) ha almeno una soluzione se

$$p < \frac{n+2}{n-2} \quad (p < \infty \text{ se } n = 1, 2)$$

(questa condizione è anche necessaria: Teorema di Pohozaev, cfr. [2], § 1).

Il Teorema di unicità 3.3 non si applica al problema (3.3) in quanto la funzione $f(u) = -u + u^p$, $p > 1$, non verifica la condizione

(S) (si noti che per $0 < p \leqq 1$ il problema (3.3) non ha soluzione: non è verificata la condizione (C)). Ciò si deve essenzialmente al fatto che f è infinita per $u \to +\infty$ e convessa in un intorno di $+\infty$.

Teoremi di unicità nei quali l'ipotesi (S) viene sostituita da condizioni di "convessità" sono stati provati da Mc. Leod e Serrin in [5]. Questi risultati permettono di stabilire l'unicità per (3.3) nei seguenti casi:

i) $n = 1, 2$ e $p > 1$

ii) $n = 3, 4$ e $1 < p < \frac{n}{n-2}$

iii) $n < n \leqq 8$ e $p < \frac{8}{n}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. BERESTYCKI, P.L. LIONS, L.M. PELETIER - An O.D.E. approach to the existence of positive solutions for semilinear problem in R^n, Indiana Univ. Math. J., vol. 30 n. 1 (1981) 141-157.

[2] ——————— Nonlinear scalar fied equations, I. Existence of a ground state, Arch. Rat. Mech. Analys. Vol. 82 (1983) 313-345.

[3] B. GIDAS, W M NI, L. NIRENBERG, Symmetry and related properties via the maximum principle, Comm. Mat. Phys. 68 (1979) 209-243.

[4] ——————— Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in R^n, Mathematical Analysis and Applications, Advances in Matematics, Part A - L. Nachbin Editor (Essay dedicated to L.S. Schwarz) Academic Press (1981) 369-402.

[5] P.L. LIONS - On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations, SIAM Rew. 24 (1982) 441-467.

[6] K. Mc. LEOD- J. SERRIN - Uniqueness of solutions of semilinear Poisson equation, Proc. Math. Acad. Sci. USA 78 (1981) 6592-6595.

[7] W.M. NI, Uniqueness of solutions of non linear Dirichlet problems, J. Diff. Eq. 50 (1983) 289-304.

[8] L.A. PELETIER - J. SERRIN - Uniqueness of positive solutions of semilinear equations in R^n, Arch. Rat. Mech. Analysis 81 (1983) 181-197.

[9] ———————— Uniqueness of non negative solutions of semilinear equations in R^n - in corso di stampa.

[10] M. PROTTER, W. WEINBERGER - Maximum principles in differential equations, Prentice-Hall 1967.

[11] G. SANSONE - Su un'equazione differenziale non lineare della fisica nucleare, Symp. Math. 6 (1970) 5-139.

[12] J. SERRIN - A symmetry problem in potential theory, Arch. Rat. Mech. Analysis 43 (1971) 304-318.